Уравнения Рейнольдса для компоненты скорости, температуры и концентрации.

Возьмем уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \qquad (2)$$

Метод осреднения Рейнольдса заключается в замене случайно изменяющихся характеристик потока (скорость, давление, плотность) суммами осреднённых и пульсационных составляющих.

$$u_i=U_i+u_i' \qquad (3)$$

$$U_i=\frac{1}{T}\int_{T-t/2}^{T+t/2}udt$$

Эти осреднения имеют некоторые свойства:

1) Если мы будем осреднять осреднюю величину U_i то все равно получим среднюю.
2) Средняя от пульсационной компоненты u_i' равняется нулю

Используя уравнения неразрывности (2), напишем уравнения (1) в таком виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_k u_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial u_k u_i}{\partial x_k}=u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k},\ u_i\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0$$

подставим (3) в (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_i+u_i')+\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k+u_k')(U_i+u_i')=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(P+p')+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(U_i+u_i')$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_i u_k'}{\partial x_k}+\frac{\partial U_i u_i'}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k' u_i'}{\partial x_k}=\\&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}+\nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k^2}\end{aligned} \qquad (4)$$

Осредняем последнее уравнение и используя свойство осреднения получим

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \overline{u_k' u_i'}}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}-\frac{\partial \overline{u'_k u'_i}}{\partial x_k}$$

Возьмем уравнение для температуры и поделаем тоже самое, что сделали для компоненты скорости

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_k\frac{\partial T}{\partial x_k}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2}$$

$$T=\overline{T}+t' \qquad\qquad u_i=U_i+u'_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T}+t')+\frac{\partial}{\partial x_k}((\overline{T}+t')(U_i+u'_i))=a\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\overline{T}+t')$$

Последнее уравнение перепишем в таком виде

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}+\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial \overline{T}U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \overline{T}u'_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_i t'}{\partial x_k}+\frac{\partial t'u'_i}{\partial x_k}=a\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_k^2}+a\frac{\partial^2 t'}{\partial x_k^2}$$

Осредняя последнее уравнение и используя свойство осреднения получим

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{T}U_i}{\partial x_k}=a\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_k^2}-\frac{\partial t'u'_i}{\partial x_k}$$

А для уравнения концентрации и поделаем тоже самое, что сделали для компоненты скорости и температуры

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u_k\frac{\partial C}{\partial x_k}=a\frac{\partial^2 C}{\partial x_k^2}$$

$$C=\overline{C}+c' \qquad\qquad u_i=U_i+u'_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{C}+c')+\frac{\partial}{\partial x_k}((\overline{C}+c')(U_i+u'_i))=a\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\overline{C}+c')$$

Последнее уравнение перепишем в таком виде

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\frac{\partial c'}{\partial t}+\frac{\partial \overline{C}U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \overline{C}u'_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_i c'}{\partial x_k}+\frac{\partial c'u'_i}{\partial x_k}=a\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_k^2}+a\frac{\partial^2 c'}{\partial x_k^2}$$

Осредняя последнее уравнение и используя свойство осреднения получим что

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{C}U_i}{\partial x_k}=a\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_k^2}-\frac{\partial c'u'_i}{\partial x_k}$$